

УДК 519.01

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С БУЛЕАНОМ

© С.В. Кольцова, С.В. Поленкова

Koltsova S.V., Polenkov S.V. Inverse formulas related to Boolean. In the different direction of mathematics and in many applied questions there are problems of the function version using her integrals. In this article we give the review of the explicit formulas of the inversion for some "integral" transformations connected with Boolean of finite set. These formulas are of interest because they are the simplified models of the inversion problems of function using "the kind of averaging", which can be met in the applications, such as different kinds of a tomography, and also in statistics (see [1], [2]). Under "integral" from the function defined on the finite set, we shall understand the sum of her values on the elements of some subset. Among considered inversion formulas one can find both known, and new, received by us recently (see [3]).

1. Формулы обращения Мебиуса

В комбинаторном анализе хорошо известны формулы обращения Мебиуса на частично упорядоченном множестве (см. [4]). Рассмотрим их на булеане.

Пусть X – конечное множество, $|X|$ – количество элементов в X , $B = B(X)$ – его булеан, то есть $2^{|X|}$ -элементное множество всех подмножеств множества X с отношением частичного порядка по включению подмножеств. Пусть $L(B)$ – множество комплексно-значных функций на B .

Для любой функции $f \in L(B)$, положим

$$g(y) = \sum_{x \subseteq y} f(x) \text{ для любого } y \subseteq X,$$

тогда

$$f(y) = \sum_{x \subseteq y} (-1)^{|y-x|} g(x) \text{ для любого } y \subseteq X.$$

Двойственное утверждение получается заменой суммирования $x \subseteq y$ суммированием по $x \supseteq y$.

2. Формулы обращения Радона

В данном пункте рассмотрим недавно полученные нами в [3] формулы.

Как известно (см. [4]), булеан является градуированной решеткой ранга n , где $n = |X|$. Пусть H^m – m -ый уровень решетки. Фиксируем k -ый и l -ый уровни, где $1 \leq k < l$, $k + l = n$. Элементы $x \in H^k$ и $y \in H^l$ назовем p -инцидентными, если $|x \cap y| = p$, $p = 0, 1, \dots, k$. Определим линейное отображение $I_{lk}^p : L(H^k) \rightarrow L(H^l)$ формулой

$$(I_{lk}^p f)(y) = \sum_{|x \cap y|=p} f(x), \quad (1)$$

где $f \in L(H^k)$. Преобразование $R = I_{n-1,1}^1$ естественно назвать преобразованием Радона по аналогии с классическим преобразованием Радона из интегральной геометрии.

Теорема 1. Пусть $f \in L(H^k)$ – произвольная функция на H^k , $1 \leq k < l$, $k + l = n$. Имеет место формула обращения

$$f = \left(\begin{matrix} l \\ l-k \end{matrix} \right)^{-1} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (l-k)^{[m]}}{k_{[m]}} I_{kl}^m I_{lk}^k f, \quad (2)$$

где $(l-k)^{[m]} = (l-k)(l-k+1) \dots (l-k+m-1)$ – возрастающий факториал длины m , $k_{[m]} = k(k-1)(k-2) \dots (k-(m-1))$ – убывающий факториал длины m .

Теорема 2. Пусть $f \in L(H^k)$, $1 \leq k < \frac{n}{2}$. Имеет место формула обращения

$$f = \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{j+1} J_{k,k+j} J_{k+j,k} f, \quad (3)$$

где $J_{k+j,k} = J_{k+j,k}^k$.

Замечание. Формулы (2) и (3) можно написать в операторной форме

$$E = \left(\begin{matrix} l \\ l-k \end{matrix} \right)^{-1} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (l-k)^{[m]}}{k_{[m]}} I_{kl}^m I_{lk}^k, \quad (2')$$

$$E = \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{j+1} J_{k,k+j} J_{k+j,k}, \quad (3')$$

где E – тождественный оператор в пространстве $L(H^k)$.

Интересно отметить, что в последней формуле операторы $A_{kj} = J_{k,k+j} J_{k+j,k}$ принадлежат алгебре Боуза–Меснера (алгебре смежности некоторой симметрической ассоциативной схемы, построенной на квадрате множества H^k .)

3. Формула обращения Лапласа

Отождествим булеан B с бинарным n -мерным кубом, вершины которого имеют n координат, принимающих значения 0 и 1. Таким образом, каждая вершина – это n -мерный бинарный вектор. Сопоставим пустому множеству нуль-вектор, k -элементным подмножествам – векторы, у которых k координат равны 1, а остальные 0. Будем рассматривать куб B как группу $\mathbb{Z}_2^n$. Используя групповую операцию, определим следующее преобразование функций $f \in L(\mathbb{Z}_2^n)$:

$$F_S(x) = \sum_{y \in S+x} f(y), \quad (4)$$

где $S \subset \mathbb{Z}_2^n$, а $S+x$ – множество $\{s+x : s \in S\}$.

Оказывается, что преобразование инъективно, если $|S|$ – нечетно и не инъективно для большинства S с четным числом элементов (см. [1]).

Рассмотрим случай, когда $S = \{x \in \mathbb{Z}_2^{2m+1} : H(0,x) = 1\}$, где $H(x,y)$ – расстояние Хэмминга, то есть количество различных координат у векторов x и y . В этом случае $|S|$ – нечетное число. Имеет место формула обращения:

$$f(y) = \frac{1}{2m+1} \sum_{x: H(x,y) \text{ нечетно}} \beta_m \left(\frac{H(x,y)-1}{2} \right) F_S(x), \quad (5)$$

где

$$\beta_m(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^k 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{(2m-1)(2m-3)\dots(2m-(2k-1))}, \\ \beta_m(0) = 1 \end{cases}$$

Рассмотренное преобразование иногда называют оператором Лапласа на кубе или преобразованием "ближайших соседей" и обозначают Δ .

4. Формула обращения Фурье

Пусть $f \in L(\mathbb{Z}_2^n)$. Преобразование Фурье определяется формулой:

$$\hat{f}(x) = \sum_y (-1)^{(x,y)} f(y) \text{ для любых } x \in \mathbb{Z}_2^n,$$

где $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ – евклидово скалярное произведение векторов.

Формула обращения имеет вид:

$$f(y) = \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^{(x,y)} \hat{f}(x),$$

(см. [1]).

Заметим, что формулу обращения преобразования Лапласа можно получить при помощи преобразования Фурье. Действительно, рассмотрим индикаторную функцию множества $S \subset \mathbb{Z}_2^n$:

$$\chi_S(y) = \begin{cases} 1, & y \in S \\ 0, & y \notin S \end{cases}$$

Тогда преобразование Лапласа функции f можно записать как свертку f с χ_S

$$\Delta f(y) = \sum_{x \in S} f(y-x) = (f * \chi_S)(y). \quad (6)$$

Возьмем преобразование Фурье от обеих частей (6), получим

$$\widehat{\Delta f}(x) = \hat{f}(x) \hat{\chi}_S(x), \quad (7)$$

где $\hat{\chi}_S(x) = \sum_{y \in S} (-1)^{(x,y)}$ – преобразование Фурье $\chi_S(y)$.

Если $\hat{\chi}_S(x)$ не обращается ни при одном x в нуль, то из (7) можно определить $\hat{f}$, а затем при помощи обратного преобразования Фурье и f . Однако формула, получаемая в результате, не проще, чем формула (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Diaconis P., Graham R.L. The Radon transform on $\mathbb{Z}_2^k$. Pac. J. Math., 1985, 118, 323–345.

2. Kennan T. Smith, F. Keinert. Mathematical foundations of computed tomography. Appl. Opt. 1985, 24, No. 23, 3950–3957.

3. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.

4. Кольцова С.В., Поленкова С.В. Элементы конечной интегральной геометрии // Вестник РУДН, Серия математика, No. 1(11), 2004, 54 – 63.

Поступила в редакцию 28 марта 2006 г.